نهايات المتتاليات

A- تذكير

انشطة تذكيرية

نشاط1: نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بـ

$$\begin{cases} u_0=1 \; ; \; u_1=3 \\ u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases} \qquad \forall n\in\mathbb{N} \quad v_n=u_{n+1}-u_n$$

1- بين أن (v_n) متتالية ثابتة .

2- استنتج أن (u_n) متتالية حسابية و حدد عناصرها المميزة

3- أحسب $S'_n=\sum_{i=1}^{i=n}u_i$ بدلالة n.

نشاط2 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة بـ

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

1- أحسب $u_2 \; ; \; u_3$

2- بين أن $(u_n)_{n\ge1}$ مكبورة بالعدد 3

3- أدرس رتابة $(u_n)_{n\ge1}$ و استنتج أن $(u_n)_{n\ge1}$ مصغورة بالعدد 2

4- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة بـ $v_n=u_n-3$

أ- بين أن $(v_n)_{n\ge1}$ متتالية هندسية و أحسب v_n بدلالة n .

ب- أحسب $S_n=\sum_{i=1}^{i=n}u_i$ بدلالة n

1-المتتالية: المكبورة –المصغورة –المحدودة

* تكون المتتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$ مكبورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي M بحيث $u_n\le M \quad \forall n\ge n_0$

* تكون المتتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$ مصغورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي m بحيث $u_n\ge m \quad \forall n\ge n_0$

* تكون المتتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$ محدودة اذا وفقط اذا كانت $(u_n)_{n\ge n_0}$ مكبورة و مصغورة

2- المتتالية الرتيبة

لتكن $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية

$(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية تزايدية $\Leftrightarrow u_{n+1}\ge u_n \quad \forall n\ge n_0$

$(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية تزايدية قطعا $\Leftrightarrow u_{n+1}\succ u_n \quad \forall n\ge n_0$

$(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية تناقصية $\Leftrightarrow u_{n+1}\le u_n \quad \forall n\ge n_0$

$(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية تناقصية قطعا $\Leftrightarrow u_{n+1}\prec u_n \quad \forall n\ge n_0$

$(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية ثابتة $\Leftrightarrow u_{n+1}=u_n \quad \forall n\ge n_0$

I- المتتالية الحسابية

1- تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$ حسابية اذا كان يوجد عدد حقيقي r بحيث $u_{n+1}=u_n+r \quad \forall n\ge n_0$
العدد r يسمى أساس المتتالية .

2- صيغة الحد العام - مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

خاصية

اذا كان $(u_n)_{n\ge p}$ متتالية حسابية أساسها r فان

$$\forall n\ge p \quad u_n=u_p+(n-p)r$$

ملاحظة - اذا كان $(u_n)_{n\ge p}$ متتالية حسابية أساسها r فان $u_n=u_q+(n-q)r \quad \forall n\ge q\ge p$

خاصية

لتكن $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية حسابية

اذا كان $S_n=u_p+u_{p+1}...............+u_{n-1}$ فان

$$S_n=\frac{(n-p)(u_p+u_{n-1})}{2}$$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n و u_{n-1} هو الحد الأخيرللمجموع S_n

$$\mathrm{S_n}=\frac{(\mathrm{S_n}\text{ عدد حدود})}{2}\left(\mathrm{S_n}\text{ الحد الأول ل + الحد الأخير}\right)$$

II- المتتالية الهندسية

1- تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$ هندسية اذا كان يوجد عدد حقيقي q بحيث $u_{n+1}=qu_n \quad \forall n\ge n_0$
العدد q يسمى أساس المتتالية .

2- صيغة الحد العام - مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

خاصية

اذا كان $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فان

$$\forall n\ge n_0 \quad u_n=u_{n_0}q^{n-n_0}$$

ملاحظة - اذا كان $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فان $u_n=u_pq^{n-p} \quad \forall n\ge p\ge n_0$

خاصية

لتكن $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1

اذا كان $S_n=u_p+u_{p+1}...............+u_{n-1}$ فان

$$S_n=u_p\left(\frac{1-q^{n-p}}{1-q}\right)$$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n

ملاحظة إذا كان (u_n) متتالية هندسية أساسها q يخالف 1 فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n=u_0+u_1.......+u_{n-1}=u_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

حالة خاصة إذا كانت $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية هندسية أساسها 1 فان $S_n=u_p+u_{p+1}.........+u_{n-1}=u_p(n-p)$

B – نهايات المتتاليات

I- نهاية متتالية

نعرف نهاية متتالية كما عرفنا نهاية دالة عند $+\infty$

نكتب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ باختصار $\lim u_n$

نشاط نعتبر المتتاليتين (u_n) و $(v_n)_{n\geq 1}$ حيث $u_n = n^2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ $\quad v_n = \frac{1}{n}+3 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

نحدد $\lim u_n$ و $\lim v_n$

نعلم أن $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ إذن $\lim u_n = +\infty$ نعلم أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+3 = 3$ إذن $\lim v_n = 3$

1- تعريف نهاية منتهية لمتتالية

نقول ان نهاية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تؤول إلى l إذا و فقط إذا كان كل مجال مفتوح مركزه l يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ابتداء من رتبة. نكتب $\lim u_n = l$

2- تعريف نهاية لا منتهية لمتتالية

*نقول ان نهاية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تؤول إلى $+\infty$ إذا و فقط إذا كان كل مجال على شكل $]A;+\infty[$ يحتوي علىجميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ابتداء من رتبة. نكتب $\lim u_n = +\infty$

*نقول ان نهاية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تؤول إلى $-\infty$ إذا و فقط إذا كان كل مجال على شكل $]-\infty;A[$ يحتوي علىجميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ابتداء من رتبة. نكتب $\lim u_n = -\infty$

ملاحظة $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim -u_n = +\infty$

3- نهايات متتالية مرجعية

خاصية

ليكن p عدد صحيح طبيعي $p\geq 1$ و k عدد حقيقي

$$\lim \sqrt{n} = +\infty \qquad \lim n^p = +\infty \qquad \lim \frac{k}{\sqrt{n}} = 0 \qquad \lim \frac{1}{n^p} = 0$$

4 خاصية

لتكن متتالية عددية $(u_n)_{n\geq n_0}$ و l عددا حقيقيا

$$\lim (u_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = l$$

$$\lim |u_n - l| = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = l$$

5- متتالية متقاربة – متتالية متباعدة

تعريف

نقول إن متتالية متقاربة إذا و فقط كانت نهايتها منتهية.

نقول إن متتالية متباعدة إذا وفقط كانت غير متقاربة.

أمثلة

نعتبر $u_n = \frac{-3}{n^2}+4$ و $v_n = n^3$ و $w_n = (-1)^n$

(u_n) متقاربة لان $\lim u_n = 4$

(v_n) متباعدة لان $\lim v_n = +\infty$

(w_n) متباعدة لأن (w_n) لا تقبل نهاية

II- مصادق التقارب

مصداق1 لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية و $(v_n)_{n\geq n_0}$, متتالية عددية متقاربة لأعداد حقيقية موجبة

l عدد حقيقي حيث $|u_n - l| \leq v_n \quad \forall n\geq N \quad \exists N\in\mathbb{N}$.

اذا كان $\lim v_n = 0$ فان $(u_n)_{n\geq n_0}$ متقاربة و $\lim u_n = l$

مصداق2 لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتاليتين عدديتين حيث $u_n \leq v_n$ $\forall n \geq N$ $\exists N \in \mathbb{N}$

اذا كان $\lim u_n = +\infty$ فان $\lim v_n = +\infty$

اذا كان $\lim v_n = -\infty$ فان $\lim u_n = -\infty$

لازمة

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ و $(w_n)_{n\geq n_0}$ ثلاث متتاليات حيث $v_n \leq u_n \leq w_n$ $\forall n \geq N$ $\exists N \in \mathbb{N}$

اذا كان $\lim v_n = \lim w_n = l$ فان $\lim u_n = l$

أمثلة نعتبر $(u_n)_{n\geq 1}$ حدد $\lim u_n$ في الحالات التالية:

أ- $u_n = n^2 + n - 3$ ب- $u_n = -n^2 + n$ ج- $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$

أ- لدينا لكل $n \geq 3$ $n^2 \leq n^2 + n - 3$ و حيث $\lim n^2 = +\infty$ ومنه $\lim u_n = +\infty$

ب- لدينا لكل $n \geq 2$ $1 - \dfrac{n}{2} \leq 0$ ومنه $1 - n \leq -\dfrac{n}{2}$ و بالتالي $n - n^2 \leq -\dfrac{n^2}{2}$

وحيث $\lim -\dfrac{n^2}{2} = -\infty$ فان $\lim u_n = -\infty$

ج- لدينا لكل $n \geq 1$ $\left|\dfrac{\sin n}{n}\right| \leq \dfrac{1}{n}$ و حيث $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ فان $\lim u_n = 0$

تمرين: نعتبر $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

بين بالترجع أن $u_n \geq \sqrt{n}$ و استنتج $\lim u_n$

III- نهاية المتتالية الهندسية q^n

الحالة1: $q \succ 1$

يوجد عدد حقيقي موجب قطعا a حيث $q = 1 + a$ نعلم أن $(1+a)^n \geq 1 + na$ ومنه $q^n \geq 1 + na$

وحيث $\lim 1 + na = +\infty$ فان $\lim q^n = +\infty$

الحالة2 $q = 1$ لدينا $\lim q^n = 1$

الحالة3 $-1 \prec q \prec 1$

$|q| \prec 1$ ومنه $\dfrac{1}{|q|} \succ 1$ و منه $\lim \left(\dfrac{1}{|q|}\right)^n = +\infty$ و بالتالي $\lim \dfrac{1}{|q|^n} = \lim \left(\dfrac{1}{|q|}\right)^n = +\infty$ و بالتالي $\lim |q^n| = 0$

إذن $\lim q^n = 0$

الحالة4 $q \leq -1$ (q^n) ليست لها نهاية

خاصية

اذا كان $q \succ 1$ فان $\lim q^n = +\infty$	اذا كان $-1 \prec q \prec 1$ فان $\lim q^n = 0$
اذا كان $q = 1$ فان $\lim q^n = 1$	اذا كان $q \leq -1$ فان (q^n) ليست لها نهاية

ملاحظة *- المتتالية (q^n) متقاربة اذا كان $-1 \prec q \leq 1$

*- ليكن $r \in \mathbb{Q}^*$

إذا كان $r \succ 0$ فان $\lim\limits_{+\infty} n^r = +\infty$ إذا كان $r \prec 0$ فان $\lim\limits_{+\infty} n^r = 0$

أمثلة حدد $\lim \left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n$ و $\lim \dfrac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$

تمرين نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة ب:

$$u_0=\frac{3}{2}\quad;\quad(\forall n\in\mathbb{N}):u_{n+1}=\frac{u_n^2+u_n}{u_n^2+1}$$

1) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}):u_n\succ 1$

2) أدرس رتابة (u_n) و استنتج أن (u_n) متقاربة

3) أ – بين أن $0\prec u_{n+1}-1\leq\frac{1}{2}(u_n-1)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ب – استنتج : $(\forall n\in\mathbb{N}):0\prec u_n-1\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ثم أحسب $\lim u_n$

تمرين: نعتبر المتتالية (u_n) حيث $\begin{cases}u_0=10\\ u_{n+1}=\frac{5u_n}{n+1}\end{cases}$

بين أن $0\leq\frac{u_{n+1}}{u_n}\prec\frac{1}{2}$ $\forall n\geq 10$ ثم حدد $\lim u_n$

IV- خاصيات

خاصية	كل متتالية متقاربة و موجبة تكون نهايتها موجبة
خاصية	إذا كان (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين نهايتها l و l' بحيث $u_n\leq v_n$ لكل $n\geq N$ فان $l\leq l'$
مبرهنة	كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متتالية متقاربة كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متتالية متقاربة

ملاحظة كل متتالية تزايدية و سالبة هي متتالية متقاربة

كل متتالية تناقصية و موجبة هي متتالية متقاربة

تمرين: نعتبر $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة بـ $u_n=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+.....+\frac{1}{n^2}$

1- بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ تزايدية

2- بين أن $\frac{1}{k^2}\prec\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ $\forall k\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ ثم بين أن $u_n\prec 2$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

3- استنتج أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة.

V- العمليات على نهايات المتتاليات المتقاربة

1- مبرهنة

(u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين و α عدد حقيقي

$$\lim(u_n+v_n)=\lim u_n+\lim v_n\qquad \lim(u_nv_n)=\lim u_n\times\lim v_n\qquad \lim(\alpha u_n)=\alpha\lim u_n$$

إذا كان $\lim v_n\neq 0$ فان $\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{\lim u_n}{\lim v_n}$

العمليات على النهايات

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n+v_n)$	$\lim(u_n\times v_n)$	$\lim\frac{u_n}{v_n}$
l	l'	$l+l'$	$l\times l'$	$\frac{l}{l'}$ $(l'\neq 0)$
l $l\neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	∞ مع وضع إشارة l	0
l $l\neq 0$	$-\infty$	$-\infty$	∞ مع وضع عكس إشارة l	0
l حيث $l\neq 0$	0^+	l	0	∞ مع وضع إشارة l
l حيث $l\neq 0$	0^-	l	0	∞ مع وضع عكس إشارة l
0	0	0	0	شكل غير محدد
0	$+\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد	0
0	$-\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	$-\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	l حيث $l\neq 0$	$+\infty$	∞ مع وضع إشارة l	∞ مع وضع إشارة l
$-\infty$	l حيث $l\neq 0$	$-\infty$	∞ مع وضع عكس إشارة l	∞ مع وضع عكس إشارة l

تمرين

حدد $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ ، $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2-3n+2}{n^2-1}$ ، $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{n^3+n-1}}{\sqrt[3]{n^2 2n-4}}$

VI- متتاليات من نوع $f(u_n)$

1- خاصية

إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية متقاربة نهايتها l و f دالة متصلة في العدد الحقيقي l فان المتتالية $(v_n)_{n\geq n_0}$ المعرفة بـ $v_n=f(u_n)$ بحيث $n\geq n_0$ متقاربة و نهايتها $f(l)$

2- متتالية من نوع $u_{n+1}=f(u_n)$

نشاط

نعتبر (u_n) متتالية عددية حيث $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\frac{2u_n+3}{u_n} \end{cases}$

1- بين أن $2\leq u_n\leq\frac{7}{2}$ $\quad\forall n\in\mathbb{N}$

2- لتكن (v_n) متتالية عددية حيث $v_n=1-\frac{4}{u_n+1}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية

ب- ب- حدد $\lim v_n$ استنتج $\lim u_n$

3- لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ حيث $f(x)=\frac{2x+3}{x}$

أ- تأكد أن f متصلة على $\left[2;\frac{7}{2}\right]$

ب- بين أن $f\left(\left[2;\frac{7}{2}\right]\right)\subset\left[2;\frac{7}{2}\right]$

ت- حل المعادلة $f(x)=x$

ماذا تلاحظ؟ ماذا تستنتج؟

خاصية

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية معرفة بالعلاقة $u_{n+1}=f(u_n)$ بحيث يوجد مجال I ضمن D_f و الحد الأول للمتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ينتمي إلى I و f متصلة على I و $f(I)\subset I$.

اذا كانت (u_n) متتالية متقاربة فان نهايتها l هي حل للمعادلة $f(x)=x$

تمرين

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ $\begin{cases} u_0=\frac{3}{2} \\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+2} \end{cases}$

1- بين أن $0\prec u_n\prec 2$ $\quad\forall n\in\mathbb{N}$.

2- بين أن (u_n) متتالية تزايدية و استنتج أن (u_n) متتالية متقاربة .

3- استنتج $\lim u_n$

تمرين

نعتبر (u_n) متالية حيث $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n(1-u_n)$ و $u_0=\frac{1}{2}$

بين أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها